数理解析研究所講究録
953巻 1996年 5-9

C^*-embedding on product spaces

筑波大学大学院　　山﨑　薫里　(Kaori Yamazaki)

1. 序

以下 X, Y を位相空間, A を X の部分空間とする. A が X に C^*- $(C-)$embedded であるというのは, A 上の有界実数値連続（実数値連続）関数を X 上の実数値連続関数に拡張できることである. また, γ を無限濃度とするとき, A が X に P^γ-embedded であるとは, A 上の濃度が高々γ の任意の正規開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, X 上の正規開被覆 $\mathcal{V}$ で $\mathcal{V} \cap A (= \{V \cap A | V \in \mathcal{V}\}) < \mathcal{U}$ となるものが存在することである. また, 任意の γ について A が X に P^γ-embedded であるとき, A は X に P-embedded であるという. よく知られているように，これらの embedding の関係は次のようにまとめられる.

$$P \Longrightarrow P^\gamma \Longrightarrow P^{\aleph_0} \Longleftrightarrow C \Longrightarrow C^*$$

ここでは，次の形の問題を考える.

問題. Xあるいは Yに適当な条件を与えたとき, $A \times Y$ が $X \times Y$ に C^*-embedded であるならば, さらに強く C-embedded となるか?

この形の問題については, 次の定理が基本的でありよく知られている.

定理 (Morita-Hoshina [1]). Y を compact Hausdorff 空間とするとき, 次の (1) から (4) は互いに同値である. ただし, $w(Y)$ は Y の weight をあらわす.
(1) $A \times Y$ は $X \times Y$ に C^*-embedded である,

(2) $A \times Y$ は $X \times Y$ に C-embedded である,

(3) $A \times Y$ は $X \times Y$ に $P^{w(Y)}$-embedded である,

(4) A は X に $P^{w(Y)}$-embedded である.

これに対して，Y が距離空間の場合, この形の問題は未だ open problem となっている.

Question 1 (Przymusiński [3], Waśko [5]). Y を non-discrete な距離空間とし，$A \times Y$ が $X \times Y$ に C^*-embedded とする．このとき，$A \times Y$ は $X \times Y$ に C-embedded であるか? さらに，同じ仮定のもとで A が X で P-embedded であるとすると, $A \times Y$ は $X \times Y$ で P-embedded となるか?

Question 1 においては, 前半が肯定的ならば, 後半は肯定的であることが知られている (Waśko [5]). また、大田先生により，Y が無理数全体の空間の場合, Question 1 は肯定的であることが示されている ([2]). ここでは，上記以外にも，初めの問題に応える幾つかの結果が得られたのでそれらを報告する.

2. 結果

先ず、Y が σ-局所コンパクトなパラコンパクト T_2空間のとき、次の定理 1, 2 より，上の Question 1 の形が成立することがわかる.

Theorem 1. Y を σ-局所コンパクト パラコンパクト T_2空間，A を X の C-embedded subset とする．$A \times Y$ が $X \times Y$ に C^*-embedded であるならば, $A \times Y$ は $X \times Y$ に C-embedded である.

Theorem 2. Y を σ-局所コンパクト パラコンパクト T_2 空間, A を X の

P-embedded subset とする．$A\times Y$ が $X\times Y$ に C^*-embedded であるならば, $A\times Y$ は $X\times Y$ に P-embedded である．

Corollary 1. Y を non-discrete σ-局所コンパクト距離空間とし，$A\times Y$ が $X\times Y$ に C^*-embedded とする．このとき，$A\times Y$ は $X\times Y$ に C-embedded である．さらに，A が X で P-embedded ならば，$A\times Y$ は $X\times Y$ に P-embedded である．

Remark 1. Corollary 1 より，有理数全体の空間 Q に対して Question 1 は肯定的であるが，Q に対して $A\times Q$ が $X\times Q$ に C^*-embedded でない正規空間 X とその閉部分空間 A が存在することが知られている ([4])．また，Przymusiński は，手書きの原稿 [3] の Theorem 4 で，空間 X の任意の閉集合 A について，全ての σ-局所コンパクト距離空間 Y に対し $A\times Y$ が $X\times Y$ に C^*-embedded となる X の必要十分条件は，X が countably Katětov となることであると述べているが，十分性の証明で Y に $\dim=0$ を仮定している．$\dim=0$ でない場合も証明できると Przymusiński はコメントはしているが，その証明は無く実際どのように証明するのか不明である．このことは，大田先生のご指摘による．

空間 Y が Σ-空間，或いは σ-空間のとき，初めの問題は以下の形で証明が得られた．以下，空間は T_2 とする．

Theorem 3. Y をパラコンパクト Σ-空間, X を正規 P-空間, A を X の C-embedded subset とする．$A\times Y$ が $X\times Y$ に C^*-embedded であるならば, $A\times Y$ は $X\times Y$ に C-embedded である．

Theorem 4. Y をパラコンパクト σ-空間, X を 正規 P-空間, A を X の P-embedded subset とする．$A\times Y$ が $X\times Y$ に C^*-embedded であるなら

ば, $A \times Y$ は $X \times Y$ に P-embedded である.

Remark 2. Theorem 3 及び 4 で，筆者は初め, X, A については Theorem 3 では X を正規 P-空間, A は閉集合，Theorem 4 では X を collectionwise normal P-空間, A は閉集合で証明したが，Theorem 3 では次の Fact 1, Theorem 4 では次の Fact 2 を証明することにより，実質的に元の形に帰着できた.

Fact 1. A を X で C-embedded, Z を $A \times Y$ と交わらない $X \times Y$ の zero-set とすると，$(\overline{A} \times Y) \cap Z = \emptyset$ である.

Fact 2. A を X で P-embedded とする. $A \times Y$ 上のσ-locally finite cozero-set cover $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ に対して、各 $\lambda \in \Lambda$ について $X \times Y$ 上のある cozero-set H_λ で $H_\lambda \cap (A \times Y) = G_\lambda$ となるなら，$\overline{A} \times Y \subset \cup\{H_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ である.

Theorem 3 と Theorem 4 の条件を比べてみると，次の問題が自然にでてくる.

Question 2. Y を パラコンパクト Σ-空間，X を (collectionwise) normal P-空間，A を X の P-embedded subset とする. $A \times Y$ が $X \times Y$ に C^*-embedded であるならば，$A \times Y$ は $X \times Y$ に P-embedded となるか?

この問題に関連して，Yang 氏は積空間の正規性について次の問題を挙げている.

Question 3 (Yang [6]). X を collectionwise normal P-空間, Y をパラコンパクト Σ-空間とする. $X \times Y$ が normal なら $X \times Y$ は collectionwise normal になるか?

Question 3 については，Yang 氏は，[6] で，X が countably compact normal ならば，肯定的であることを証明している．Yang 氏の証明はやや複雑であるが，より簡単な別証明が得られることがわかる．その手法を用いると，X を collectionwise normal Σ 空間としても，Question 3 は肯定的であることが証明できる．また，同様な考え方で，Question 2 についても，X が collectionwise normal Σ のときは，肯定的であることがいえる．これらは保科先生との共同の研究で得られたものです．

参考文献

[1] Morita, K. and T. Hoshina, *P-embedding and product spaces*, Fund. Math. 93 (1976), 71-86.

[2] Ohta, H., *Rectangular normality of products with a metric factor*, 京都大学数理解析研究所講究録 823(1994), 106-117.

[3] Przymusiński, T. C., *Notes on extendability of continuous functions from products with a metric factor* (1983), manuscript.

[4] ____________, *A solution to a problem of E. Michael*, Pacific J. Math. 114 (1984), 235-242.

[5] Waśko, A., *Extensions of functions from products with compact or metric factors*, Fund. Math. 125 (1985), 81-88.

[6] Yang, L., *Normality in product spaces and covering properties*, Doctor Thesis at Univ. Tsukuba (1995).